TITLE:
Mean values of Mordell-Tornheim double zeta-functions (Analytic Number Theory : Arithmetic Properties of Transcendental Functions and their Applications)

AUTHOR(S):
岡本, 卓也; 小野塚, 友一

CITATION:
岡本, 卓也 ...[et al]. Mean values of Mordell-Tornheim double zeta-functions (Analytic Number Theory : Arithmetic Properties of Transcendental Functions and their Applications). 数理解析研究所講究録 2014, 1898: 70-79

ISSUE DATE:
2014-05

URL:
http://hdl.handle.net/2433/195895

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1898 巻 2014 年 70-79

Mean values of Mordell-Tornheim double zeta-functions

Takuya Okamoto
College of Science and Engineering, Ritsumeikan University
Tomokazu Onozuka
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Mean values of the Riemann zeta-function.

$s\in\mathbb{C}$ に対して，リーマンゼータ関数は

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$$

と定義される．この級数は $\Re(s)>1$ で絶対収束し，$\mathbb{C}$ 上に有理型に接続される．このリーマンゼータ関数は様々な分野との関わりがあり，盛んに研究がされている．しかし，未だにわかっていないことも多くある．その 1 つに次の Lindelöf 予想がある．

Lindelöf 予想.

任意の $\varepsilon>0$ 対して，

$$\zeta(1/2+it)=O(t^{\varepsilon}).$$

この Lindelöf 予想を仮定すると，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\zeta(\sigma+it)=O(t^{\varepsilon})\quad(1/2\leq\sigma<1)$ が成り立つ．しかし，この Lindelöf 予想は成り立つと考えられているが，その証明には到っていない．そこで，Lindelöf 予想には及ばないにしろ，平均をとれば，様子が明らかにならないだろうかと，リーマンゼータ関数の 2 乗平均が考えられた．それについては次の結果がよく知られている．

リーマンゼータ関数の 2 乗平均値定理 [8].

$$\frac{1}{T}\int_2^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt \sim \zeta(2\sigma) \quad (\sigma > 1/2),$$
$$\frac{1}{T}\int_2^T |\zeta(1/2+it)|^2 dt \sim \log T.$$

実際に，この 2 乗平均値の結果をみると，Lindelöf 予想は正しいように思える．このように，Lindelöf 予想と 2 乗平均値には深い関わりある．

では，多変数関数である多重ゼータ関数に対しても，その 2 乗平均値を考えることで Lindelöf 予想の類似を与えることができないだろうか？

そのような動機から，Matsumoto, Tsumura [5] が Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数に対して，その 2 乗平均値を考察した．

Mean values of the Euler-Zagier double zeta-function.

$s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ に対して，Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数は

$$\zeta_{EZ,2}(s_1,s_2) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}}$$

と定義される．この級数は $\Re(s_2) > 1, \Re(s_1+s_2) > 2$ で絶対収束し，$\mathbb{C}^2$ 上に有理型に接続される ([4])．また，Akiyama, Egami, Tanigawa [1] により，true singularities が $s_2 = 1, s_1 + s_2 = 2, 1, 0, -2, -4, \cdots$ であることも示された．

では，この 2 変数関数である Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数に対して，Lindelöf 予想の類似は存在するのだろうか？

実際に，Nakamura, Pańkowski [6] は $\zeta_{EZ,2}(1/2+it, 1/2+it) = O(t^{\varepsilon})$ が成り立つであろうと予想している．そして，この予想を示唆する結果を与えている．しかし，$s_1 = 1/2+it_1, s_2 = 1/2+it_2$ の複素部分を同一視しなければどうなるだろうかという疑問がある．これに対して，Kiuchi, Tanigawa, Zhai [3] は $s_1 = 1/2+it_1, s_2 = 1/2+it_2$ の複素部分 t_1, t_2 にある条件を与えると，Lindelöf 予想の類似が成り立たない例を与えた．このように，多変数関数では，Lindelöf 予想の類似が簡単には与えることができない．そこで，リーマンゼータ関数の 2 乗平均値を考えた動機と同様に，この Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数の 2 乗平均値を考えることによって，その Lindelöf 予想の類似が成り立つであろうことを示唆しようと Matsumoto, Tsumura [5] はその平均値を考え，次の

結果を与えた.

Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数の 2 乗平均値定理 [5].

$$\int_2^T |\zeta_{EZ,2}(s_1, \sigma + it)|^2 dt \sim \zeta_2^{[2]}(s_1, 2\sigma)T$$

が成り立つ. ただし, s_1 と σ は領域

$$D_1 := \left\{ (s_1, \sigma) \;\middle|\; \Re(s_1) > 1,\ \sigma > \frac{1}{2} \text{ and } \Re(s_1) + \sigma > 2 \right\} \cup$$
$$\left\{ (s_1, \sigma) \;\middle|\; \frac{1}{2} < \Re(s_1) < \frac{3}{2},\ \frac{1}{2} < \sigma \leq 1,\ \frac{3}{2} < \Re(s_1) + \sigma \leq 2 \right.$$
$$\left. \text{and } s_1 + \sigma + it \neq 2 \text{ for } 2 \leq t \leq T \right\}$$

上にあるものとし, $\zeta_2^{[2]}(s_1, s_2)$ は

$$\zeta_2^{[2]}(s_1, s_2) = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^{s_1}} \right|^2 \frac{1}{k^{s_2}}$$

で与えられる関数とする.

この結果は, D_1 上では Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数に対して, Lindelöf 予想の類似が成り立つかもしれないことを示唆してる.

また, この結果の証明については, Matsumoto, Tsumura は D_1 を 3 パートに分けて証明している. 実際には, Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数が絶対収束する $\Re(s_2) > 1, \Re(s_1 + s_2) > 2$ のときと, 絶対収束しない部分を 2 パートに分けて考えている. 絶対収束する場合は級数表示がそのまま使えるので, 証明はそれほど難しくはない. 絶対収束しないところでは, Matsumoto, Tsumura は Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数の級数を有限部分で止めた式を用いることで証明している. その証明はそれほど容易ではなく, 様々な部分を上手く評価するために, Mellin-Barnes 積分表示やその積分路のシフトなどを用いる必要がある. ここでは, この Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数に対しての結果の証明の詳細は省く.

では, このように平均値を考えることで, 他の多重ゼータ関数に対しても, Lindelöf 予想の類似を与えることができないであろうか?

このような考えから Okamoto, Onozuka は Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数の平均値定理を考えた.

Mean values of the Mordell-Tornheim double zeta-function.

まず，$s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{C}$ に対して，Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数は

$$\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; s_3) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}}$$

により与えられ，$\Re s_1 + \Re s_3 > 1$, $\Re s_2 + \Re s_3 > 1$, $\Re s_1 + \Re s_2 + \Re s_3 > 2$ で絶対収束する ([7] の Theorem 2.2)．また，$\mathbb{C}^3$ 上に有理型に接続される ([4])．

ここで，この Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数が Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数の一般化になっていることに注意する．実際に，

$$\zeta_{MT,2}(s_1, 0; s_3) = \zeta_{EZ,2}(s_1, s_3)$$

である．このことから，Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数に対して，Lindelöf 予想の類似を与えるだけではなく，Matsumoto, Tsumura [5] が与えた Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数の平均値の結果の一般化を与えることも 1 つの重要な目的となる．そのような動機から，Okamoto, Onozuka は Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数の 2 乗平均値を考察し，次の結果を得た．

Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数の 2 乗平均値定理 [7].

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; \sigma + it)|^2 dt \sim \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; 2\sigma) T$$

が成り立つ．ただし，s_1, s_2 と σ は領域

$$D_2 := \Big\{(s_1, s_2, \sigma) \;\Big|\; \Re(s_1) + \sigma > 1,\ \Re(s_2) + \sigma > 1 \text{ and } \Re(s_1) + \Re(s_2) + \sigma > 2\Big\} \cup$$
$$\Big\{(s_1, s_2, \sigma) \;\Big|\; \Re(s_1) > 1,\ \Re(s_2) \geq 0,\ \sigma > 0,\ \Im(s_2) \geq 0,\ \frac{1}{2} < \Re(s_2) + \sigma \leq 1 \text{ and } \Re(s_1) + \Re(s_2) + \sigma > 2\Big\} \cup$$
$$\Big\{(s_1, s_2, \sigma) \;\Big|\; \frac{1}{2} < \Re(s_1) < \frac{3}{2},\ \Re(s_2) \geq 0,\ \sigma > 0,\ \Im(s_2) \geq 0,\ \Re(s_1) + \sigma > 1,$$
$$\frac{1}{2} < \Re(s_2) + \sigma \leq 1,\ \frac{3}{2} < \Re(s_1) + \Re(s_2) + \sigma \leq 2 \text{ and } s_1 + s_2 + \sigma + it \neq 2 \text{ for } 2 \leq t \leq T\Big\}$$

上にあるものとし，$\zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; s_3)$ は

$$\zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; s_3) = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^{s_1}(k-m)^{s_2}} \right|^2 \frac{1}{k^{s_3}}$$

で与えられる関数とする．

実際に，この結果は

$$(s_1,\sigma)\in D_1 \Rightarrow (s_1,0;\sigma)\in D_2,$$

$$\zeta^{[2]}_{MT,2}(s_1,0;2\sigma)=\zeta^{[2]}_2(s_1,2\sigma)$$

であることから，[7] の結果の一般化になっている．そして，この結果は，D_2 上では Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数に対して，Lindelöf 予想の類似が成り立つかもしれないことを示唆してる．

また，証明については Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数の結果と同様に，D_2 を絶対収束する部分と絶対収束しない部分に分けて証明をする．しかし，Euler-Zagier 型の 2 重ゼータ関数と同様に証明ができるかというと，絶対収束しない部分では同じようにできない部分があり，そこでは上手く評価をする必要がある．また，絶対収束する領域ではどうかというと，同様にやってもできるが，ここでは，ある補題を用いることでより簡単に示すことができた．

まずは，この絶対収束する領域での平均値定理を詳しく与え，その証明を与える．その平均値定理とは以下の通りである．ただし，以下，$s=\sigma+it, s_1=\sigma_1+it_1, s_2=\sigma_2+it_2$ とする．

第 1 平均値定理（絶対収束する領域） [7].

$\sigma_1+\sigma>1, \sigma_2+\sigma>1, \sigma_1+\sigma_2+\sigma>2, t\geq 2$ を満たす $s_1,s_2,s\in\mathbb{C}$ に対して，

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s)|^2\,dt=\zeta^{[2]}_{MT,2}(s_1,s_2;2\sigma)T+O(1) \qquad (T\to\infty)$$

が成り立つ．

この証明には以下の補題を用いる．この補題の証明については参考文献に任す．

Lemma ([2] THEOREM 5.2).

$a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\int_0^T \left| \sum_{n \le N} a_n n^{it} \right|^2 dt = T \sum_{n \le N} |a_n|^2 + O\left(\sum_{n \le N} n |a_n|^2 \right) \qquad (T \to \infty)$$

が成り立ち，上の公式の右辺の級数が $N = \infty$ としても収束するならば, $N = \infty$ としても上の公式は成り立つ.

では，第 1 平均値定理の証明に戻る．まず，$\sigma_1 + \sigma > 1, \sigma_2 + \sigma > 1, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma > 2$ では，Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数は絶対収束していることに注意する．このとき，和の順序の交換により,

$$\begin{aligned} \zeta_{MT,2}(s_1, s_2; s) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{\sigma+it}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^{s_1} (k-m)^{s_2} k^{\sigma}} \right) k^{-it} \\ &= \overline{\sum_{k=2}^{\infty} \overline{a_k} k^{it}} \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，a_k は

$$a_k = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^{s_1} (k-m)^{s_2} k^{\sigma}}$$

で与えられる．さらに,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^{s_1} (k-m)^{s_2}} \right|^2 k^{1-2\sigma} = \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2, 2\sigma - 1)$$

が成り立つ．ここで，$\zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2, 2\sigma - 1)$ が $\sigma_1 + \sigma > 1, \sigma_2 + \sigma > 1, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma > 2$, では絶対収束することを用いると ([7] の Theorem 2.2),

$$\sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2 = O(1)$$

を得る．さらに，上と同様にすれば,

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k|^2 = \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2, 2\sigma).$$

となる.

したがって，上の Lemma を用いれば，第 1 平均値定理が成り立つことがわかる．□

このように，絶対収束する領域では簡単に平均値定理を示すことができる．では，絶対収束しない領域ではどうであろうか？

最後に，絶対収束しない領域での平均値定理を詳しく述べ，その証明の概略のみを与える．

第 2 平均値定理（絶対収束しない領域） [7].

$s_1, s_2, s \in \mathbb{C}$ を $1/2 < \sigma_2 + \sigma \le 1, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma > 2, \sigma_1 > 1, \sigma_2 \ge 0, \sigma > 0, t_2 \ge 0, t \ge 2$ を満たすものとし，t が 2 から T へ動くとき，(s_1, s_2, s) は超平面 $s_2 + s = 1$ を通らないものとする．このとき，

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; s)|^2\, dt = \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; 2\sigma)T + O(T^{1/2}) + O(T^{2-2\sigma_2-2\sigma}\log T)\ (T \to \infty)$$

が成り立つ．

第 3 平均値定理（絶対収束しない領域） [7].

$s_1, s_2, s \in \mathbb{C}$ を $\sigma_1 + \sigma > 1, 1/2 < \sigma_2 + \sigma \le 1, 3/2 < \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma \le 2, 1/2 < \sigma_1 < 3/2, \sigma_2 \ge 0, \sigma > 0, t_2 \ge 0, t \ge 2$ を満たすものとし，t が 2 から T へ動くとき，(s_1, s_2, s) は超平面 $s_2 + s = 1$ と $s_1 + s_2 + s = 2$ を通らないものとする．このとき，

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; s)|^2\, dt = \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; 2\sigma)T$$
$$+ \begin{cases} O(T^{4-2\sigma_1-2\sigma_2-2\sigma}\log T) + O(T^{1/2}) & (1/2 < \sigma_1 < 1, 1/2 < \sigma_2 + \sigma < 1) \\ O(T^{2-2\sigma_1}(\log T)^2) + O(T^{1/2}) & (1/2 < \sigma_1 < 1, \sigma_2 + \sigma = 1) \\ O(T^{2-2\sigma_2-2\sigma}(\log T)^3) + O(T^{1/2}) & (\sigma_1 = 1, 1/2 < \sigma_2 + \sigma < 1) \\ O(T^{1/2}) & (\sigma_1 = 1, \sigma_2 + \sigma = 1) \\ O(T^{2-2\sigma_2-2\sigma}\log T) + O(T^{1/2}) & (1 < \sigma_1 < 3/2, 1/2 < \sigma_2 + \sigma < 1) \end{cases}$$
$$(T \to \infty)$$

が成り立つ．

これらの証明では級数表示を使用できないので，次のような漸近公式を用いる必要がある．

$$\zeta_{MT,2}(s_1,s_2,s) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\le x}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^s} + \frac{x^{-s_2+1}}{s_2+s-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}(m+x)^s}$$
$$+\frac{s}{s_2+s-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1-1}}\int_x^{\infty}\frac{dy}{y^{s_2}(y+m)^{s+1}}$$
$$+\begin{cases} O(x^{-\sigma_2-\sigma}) & (\sigma_1>1)\\ O(x^{-\sigma_2-\sigma}\log x) & (\sigma_1=1)\\ O(x^{1-\sigma_1-\sigma_2-\sigma}) & (\sigma_1<1).\end{cases}$$

ただし，$s_1,s_2,s\in\mathbb{C}$ はある条件を満たすとものであるが，平均値定理の仮定を満たせば十分で，また，$x\ge 1$ であるが，ここでは，$a=\max\{1,|t_2|\}$ とし，$x=at$ として用いる．そして，その式を上手く評価すれば（Mellin-Barnes 積分を用いる必要もある），

$$\zeta_{MT,2}(s_1,s_2,s) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\le at}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^s} + \begin{cases} O(t^{-\sigma_2-\sigma}) & (\sigma_1\ne 2)\\ O(t^{-\sigma_2-\sigma}\log t) & (\sigma_1=2)\end{cases}$$

という級数表示を有限部で切った公式を得ることができる．この式が絶対収束しない領域での平均値定理を与える上での核となる公式の 1 つである．

上の公式を用いると，平均値定理を与えるためには

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1,s_2,s)|^2\,dt = \int_2^T |\Sigma_1(s_1,s_2,s)+E(s_1,s_2,s)|^2\,dt$$
$$= \int_2^T |\Sigma_1(s_1,s_2,s)|^2\,dt + O\left(\int_2^T |\Sigma_1(s_1,s_2,s)E(s_1,s_2,s)|\,dt\right)$$
$$+O\left(\int_2^T |E(s_1,s_2,s)|^2\,dt\right)$$

の右辺を評価する必要がある．ただし，ここで，$\Sigma_1(s_1,s_2,s), E(s_1,s_2,s)$ はそれぞれ，上の式の主要項と剰余項である．

第 2 平均値定理の仮定の下では，和を上手く分けて評価することにより，

$$\int_2^T |\Sigma_1(s_1,s_2,s)|^2\,dt = \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1,s_2,2\sigma)T + \begin{cases} O((\log T)^2) & (\sigma_2+\sigma=1) \\ O(T^{2-2\sigma_2-2\sigma}\log T) & (1/2<\sigma_2+\sigma<1)\,. \end{cases}$$

が成り立つことを示すことができる．そして，第 2 平均値定理の仮定の下では，$O\left(\int_2^T |E(s_1,s_2,s)|^2\,dt\right) = O(1)$ となり，さらに，コーシー・シュワルツの不等式と上の評価を用いれば，

$$\int_2^T |\Sigma_1(s_1,s_2,s)E(s_1,s_2,s)|\,dt \ll \left(\int_2^T |\Sigma_1(s_1,s_2,s)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_2^T |E(s_1,s_2,s)|^2\,dt\right)^{1/2} = O(T^{1/2})$$

となる．よって，これらをまとめることにより，第 2 平均値定理を得る．

さらに，第 3 平均値定理の仮定の下では，

$$\int_2^T |\Sigma_1(s_1,s_2,s)|^2\,dt = \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1,s_2,2\sigma)T + O(E(T))$$

が成り立つ．この証明には第 2 平均値定理の証明のときと同様には与えることができず，より詳しくみる必要がある．ただし， $E(T)$ は

$$E(T) = \begin{cases} T^{4-2\sigma_1-2\sigma_2-2\sigma}\log T & (1/2<\sigma_1<1, 1/2<\sigma_2+\sigma<1) \\ T^{2-2\sigma_1}(\log T)^2 & (1/2<\sigma_1<1, \sigma_2+\sigma=1) \\ T^{2-2\sigma_2-2\sigma}(\log T)^3 & (\sigma_1=1, 1/2<\sigma_2+\sigma<1) \\ (\log T)^4 & (\sigma_1=1, \sigma_2+\sigma=1) \\ T^{2-2\sigma_2-2\sigma}\log T & (1<\sigma_1<3/2, 1/2<\sigma_2+\sigma<1) \end{cases}$$

で与えられる．残りの部分は第 2 平均値定理と同様に示すことができ，それらをまとめることにより，第 3 平均値定理を得る．

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith. **98** (2001), 107-116.

[2] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley, 1985.

[3] I. Kiuchi, Y. Tanigawa and W. Zhai, *Analytic properties of double zeta-*

functions, Indag. Math. **21** (2011), 16-29.

[4] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in: M. A. Bennett et al.(Eds), Number Theory for the Mellennium II, Proc. Millennial Conference on Number Theory, A K Peters, Wellesley, 2002, pp. 417-440.

[5] K. Matsumoto and H. Tsumura, *Mean value theorems for double zeta-function I*, submitted.

[6] T. Nakamura and L. Pańkowski, *Any non-monomial polynomial of the Riemann zeta-function has complex zeros off the critical line*, preprint, arXiv:1212.5890.

[7] T. Okamoto and T. Onozuka, *Mean value theorems for the Mordell-Tornheim double zeta-function*, submitted.

[8] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann zeta-function, Second Edition, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

Present Address:
Takuya Okamoto
College of Science and Engineering
Ritsumeikan University
1-1-1 Nojihigashi, Kusatsu, Shiga 525-8577
Japan
E-mail: takuyaok@fc.ritsumei.ac.jp
Tomokazu Onozuka
Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
E-mail:m11022v@math.nagoya-u.ac.jp